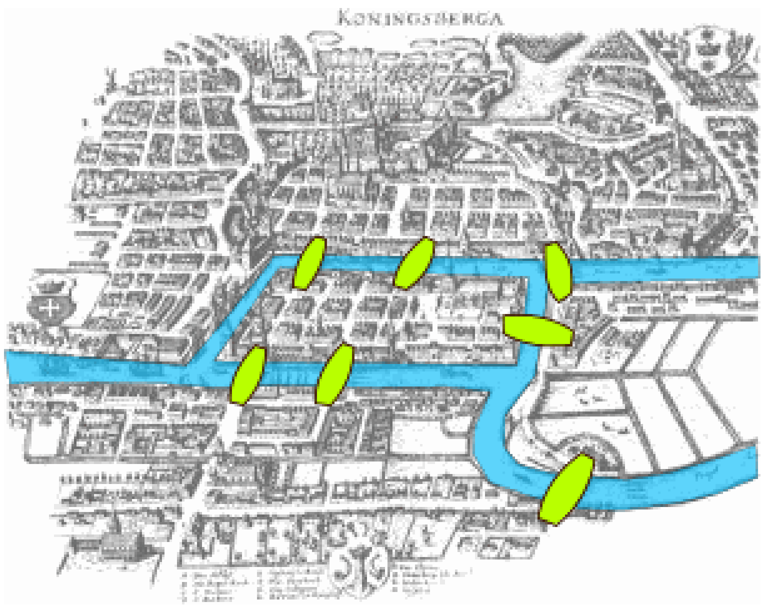
Hochschule für Technik Stuttgart

HFT Stuttgart
Fakultät Vermessung, Informatik und Mathematik
Fachgruppe Mathematik

Lösungen graphentheoretischer Probleme, Euler-Graphen

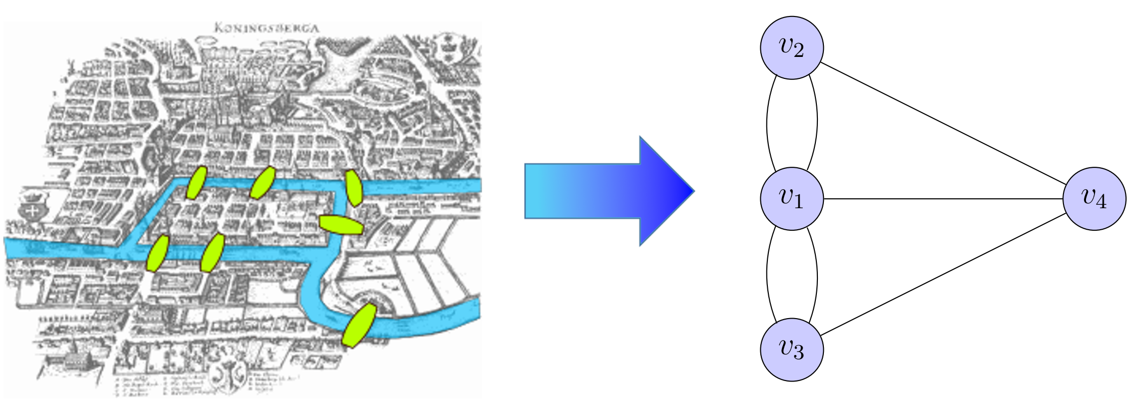
1. Grundlegende Begriffe

Graphen gehen auf den Schweizer Mathematiker Leonard Euler zurück, der von 1707-1783 lebte. Im Jahre 1736 löste Euler das „Königsberger Brückenproblem“ mit Hilfe von Graphen. Königsberg wurde zu dieser Zeit durch den Fluss Pregel in vier Gebiete unterteilt. Die Gebiete sind durch sieben Brücken verbunden.



Quelle: By Bogdan Giusca - Public domain (PD),based on the image, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=112920

Das Problem bestand darin einen Weg zu finden, bei dem man *alle* sieben Brücken über den Fluss Pregel *genau einmal* überquert. Euler bewies 1736, dass ein solcher Weg nicht möglich ist. Dazu erzeugte er einen sogenannten *Graphen*, den er analysierte.



Definition:
Ein *(ungerichteter endlicher) Graph* $G = (V, E)$ besteht aus endlich vielen *Knoten (vertices)* und *Kanten (edges)*. Die Knoten sind in der Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, die Kanten in der Menge $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $(n, m \in \mathbb{N})$ zusammengefasst.
In einem Graphen verbindet jede Kante $e \in E$ zwei Knoten $v \in V$ und $w \in V$.

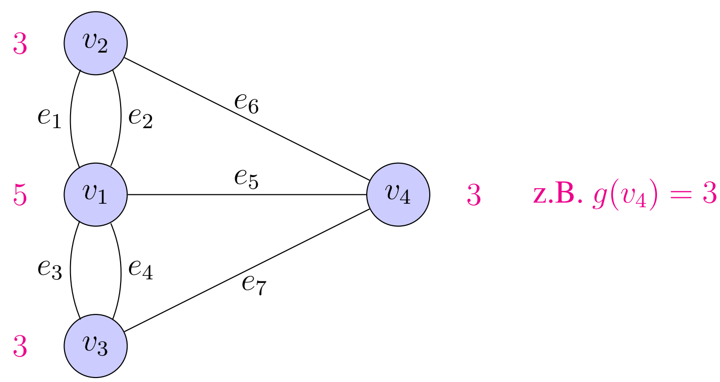
Die Anzahl von Kanten, die von einem Knoten $v_j \in V$ ausgehen, heißt *Grad* des Knotens und wird mit $g(v_j)$ bezeichnet $(j = 1, \ldots, n)$.
Ein Graph heißt *(k-)regulär* für $k \in \mathbb{N}$, wenn jeder Knoten den gleichen Grad, nämlich k , besitzt.

Beispiel: Königsberger Brückenproblem

Die vier durch den Fluss getrennten Bereiche von Königsberg entsprechen im Graphen den Knoten (4 blaue Kreise), die Kanten entsprechen den (Wegen über die) Brücken, die von Bereich zu Bereich führen (7 schwarze Linien). Die Knotengrade sind

$V = \{v_1, \cdots, v_4\}$

$E = \{e_1, \cdots, e_7\}$



Der Graph ist nicht k-regulär für ein $k \in \mathbb{N}$, da zwei verschiedene Knotengrade vorkommen $(3 \neq 5)$.

Weitere Definitionen:
Die Anzahl der Knoten $|V|$ des Graphen heißt *Ordnung* des Graphen.
Die Anzahl der Kanten $|E|$ des Graphen heißt *Größe* des Graphen.

Jeder Kante $e \in E$ werden zwei Knoten zugeordnet, ihre *Endknoten*. Sind $u \in V$ und $v \in V$ die Endknoten einer Kante $e \in E$ so schreiben wir:

$$e = \langle v, u \rangle \text{ oder } e = \langle u, v \rangle,$$

wobei es bei ungerichteten Graphen nicht auf die Reihenfolge von u und v ankommt, da es egal ist, in welcher Richtung die Kanten durchlaufen werden.

Die Knoten u, v eines Graphen G heißen *benachbart*, falls sie durch eine Kante verbunden sind, d.h. wenn es ein $e \in E$ gibt mit $e = \langle v, u \rangle$ oder $e = \langle u, v \rangle$.
Zwei Kanten heißen *benachbart*, wenn sie mindestens einen gemeinsamen Knoten besitzen.

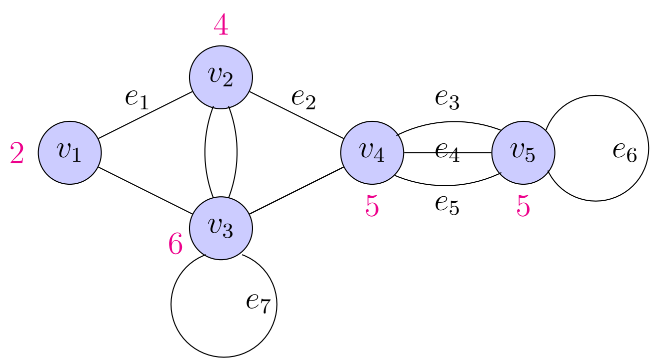
Mehrfachkanten bestehen aus mehreren Kanten, die dieselben Knoten verbinden.
Zwei verschiedene Kanten heißen *parallel*, wenn sie Kanten einer Mehrfachkante sind.

Eine *Schlinge* e ist eine Kante, die einen Knoten v mit sich selbst verbindet: $e = \langle v, v \rangle$
(Schlingen werden bei der Gradbestimmung eines Knoten doppelt gezählt.)

Ein *einfacher* Graph enthält keine Mehrfachkanten oder Schlingen.

Beispiel:

Der folgende Graph hat die Ordnung 5 und die Größe 11. Die Knotengrade sind $g(v_1) = 2,\ g(v_2) = 4,\ g(v_3) = 6,\ g(v_4) = 5 = g(v_5)$.



e_6 und e_7 sind Schlingen: $e_6 = \langle v_5, v_5 \rangle, e_7 = \langle v_3, v_3 \rangle$.

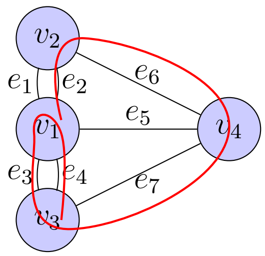
$e_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ und $e_2 = \langle v_2, v_4 \rangle$ sind benachbarte Kanten, e_1 und $e_4 = \langle v_4, v_5 \rangle$ sind nicht benachbart. $e_3 = \langle v_4, v_5 \rangle, e_4 = \langle v_4, v_5 \rangle \neq e_3, e_5 = \langle v_5, v_4 \rangle \neq e_3$ (und $e_5 \neq e_4$) sind parallele Kanten, es liegt eine Mehrfachkante vor. Der Graph ist kein einfacher Graph.

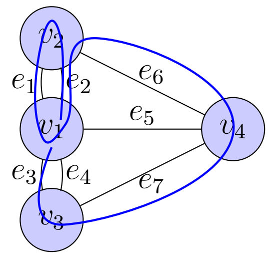
Definition:
Ein *Weg* W ist eine Folge, in der sich Knoten und Kanten abwechseln, beginnend und endend bei einem Knoten. Es ist $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \cdots, v_n)$, wobei $e_i = \langle v_i, v_{i+1} \rangle$ für $i = 1, \ldots, n-1$.
Ein Weg kann bei einfachen Graphen einfacher beschrieben werden durch eine Folge aus Knoten $W = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$, da die Kante von v_i zu v_{i+1} für jedes i eindeutig ist.
$v_2, \cdots, v_{n-1}$ heißen die *inneren Knoten* des Wegs, v_1 heißt *Startknoten*, v_n *Endknoten* des Wegs.

Ein *Pfad* ist ein spezieller Weg, bei dem kein Knoten mehrfach vorkommt.
Die Anzahl der Kanten eines Wegs oder Pfads wird als *Länge* des Wegs bzw. Pfads bezeichnet.
Ein Weg, bei dem Start- und Endknoten übereinstimmen, wird *Zykel* genannt. Ein Zykel mit lauter verschiedenen inneren Knoten heißt *Kreis*.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei beliebigen verschiedenen Knoten v_i und v_j immer einen Weg von v_i nach v_j gibt.

Beispiel: Graph des Königsberger Brückenproblems





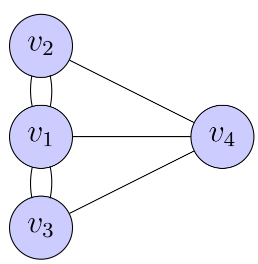
Die Folge $(v_1, e_2, v_2, e_6, v_4, e_7, v_3, e_3, v_1, e_4, v_3)$ ist ein Weg, der kein Pfad ist. Seine Länge ist 5.
Die Folge $(v_1, e_2, v_2, e_6, v_4, e_7, v_3)$ ist ein Pfad. Seine Länge ist 3.
Die Folge $(v_1, e_2, v_2, e_1, v_1, e_2, v_2, e_6, v_4, e_7, v_3, e_3, v_1)$ ist ein Zykel, aber kein Kreis. Seine Länge ist 6.
Die Folge $(v_1, e_2, v_2, e_6, v_4, e_7, v_3, e_3, v_1)$ ist ein Kreis. Seine Länge ist 4.
Der Graph ist zusammenhängend.

2. Euler-Graphen

Definition:
Ein Weg in einem Graphen, bei dem *jede* Kante *genau einmal* durchlaufen wird, heißt ***Euler-Weg***.
Ein Euler-Weg, der ein Zykel (i.A. kein Kreis!) ist, wird ***Euler-Kreis*** genannt.
Ein Graph G heißt ***Euler-Graph***, falls er einen Euler-Kreis enthält.

Beispiel: Graph des Königsberger Brückenproblems

Die Frage ist, ob der Graph



ein Euler-Graph ist.

- Dazu starten wir an irgendeinem Standort (Startknoten) v_i und benötigen selbstverständlich mindestens eine Kante (Brücke), um zum nächsten Knoten zu gelangen.
- Am nächsten Standort (innerer Knoten) v_j muss eine gerade Anzahl von Kanten ankommen bzw. weggehen: Um zum Knoten hin zu gelangen und um von ihm weg zu kommen, braucht

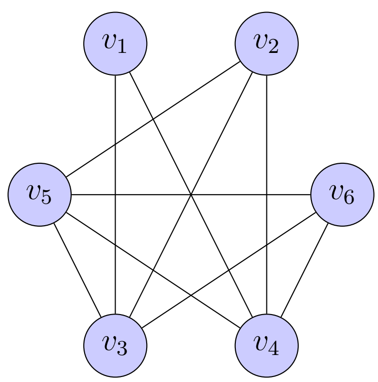
man genau ein Kantenpaar. Also muss der Grad von inneren Knoten gerade sein. Dies gilt für alle solche Knoten.

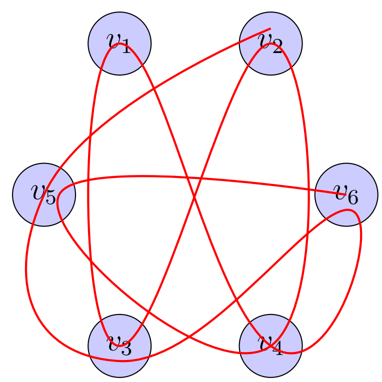
- Zum Erreichen des letzten Standortes (Endknoten) genügt wieder mindestens eine Kante.
- Wir stellen aber am Graphen fest: Die vier Knoten haben alle ungeraden Grad, 3 oder 5. Also kann es keinen Weg geben, der in alle Bereiche von Königsberg führt und bei dem man genau einmal über jede Brücke geht.

Weitere Beispiele:

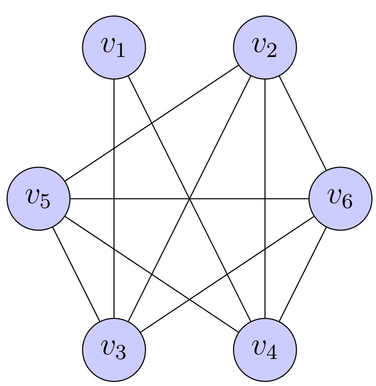
Bei dem folgenden einfachen Graph liegt ein Euler-Weg vor, aber kein Euler-Kreis. Denn der Graph hat genau zwei Knoten ungeraden Grades (v_2 und v_6), alle anderen Knoten besitzen geraden Grad und dienen als innere Knoten.
Der Euler-Weg muss gemäß den obigen Betrachtungen am Köngsberger Brückenproblem bei einem von den beiden Knoten ungeraden Grades beginnen, z.B. bei v_2. Enden muss der Weg an dem zweiten Knoten ungeraden Grades, nämlich v_6.

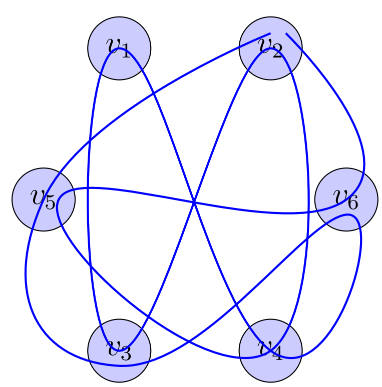
Ein Euler-Weg lautet $(v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6)$.





Der nachfolgende Graph ist ein Euler-Graph. Ein Euler-Kreis ist $(v_2, v_5, v_3, v_6, v_4, v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_2)$.





Aus den obigen Betrachtungen erhält man

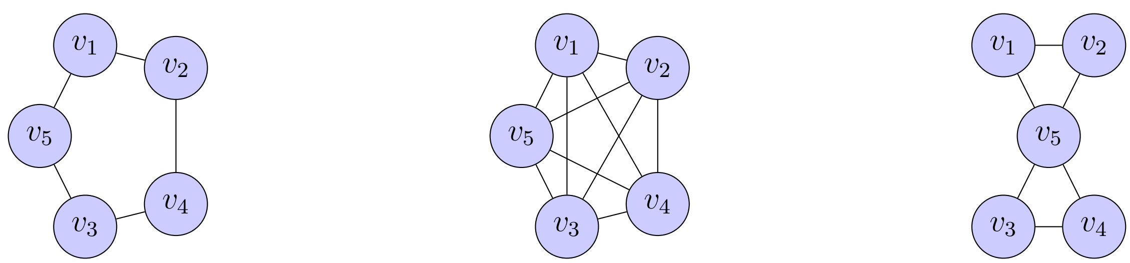
Satz 1 (Satz von Euler)
Es gilt für einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen:

1. Der Graph enthält einen Euler-Weg. $\iff$ Zwei oder kein Knoten im Graphen sind von ungeradem Grad.

2. Der Graph ist ein Euler-Graph. $\iff$ Alle Knoten haben geraden Grad.

Bei 1. dienen die beiden Knoten ungeraden Grades als Start- und Endknoten des Euler-Kreises. In 2. ist der Startknoten beliebig wählbar.

Beispiele:
Euler-Graphen mit $|V| = 5$:



3. Finden eines Euler-Kreises

Es gibt zahlreiche Algorithmen, die zum Finden eines Euler-Kreises angewandt werden. Es wird hier der Algorithmus von Carl Hierholzer (deutscher Mathematiker, 1840-1871) vorgestellt. Vorausgesetzt wird ein Euler-Graph G.

Algorithmus von Hierholzer zum Finden eines Euler-Kreises:

1. Wähle einen beliebigen Knoten v des Graphen G aus.
2. Konstruiere von v ausgehend einen Zykel $\tilde{K}$ in G, der keine Kante in G zweimal durchläuft. Der Zykel musss nicht schon alle Kanten des Graphen besitzen, deshalb wird er auch ein *Unterzykel* genannt.
3. Nenne $\tilde{K}$ nun K.
4. Wenn K alle Kanten von G enthält, dann sind wir fertig, und K ist der gesuchte Euler-Kreis.

Falls nicht:

5. Wähle einen Knoten v in G von K mit Grad „außerhalb von K“ größer 0. Die Bedingung „Grad außerhalb von K“ garantiert, dass später K mit einem in 8. noch zu konstruierenden $\tilde{K}$ einen Weg bilden.

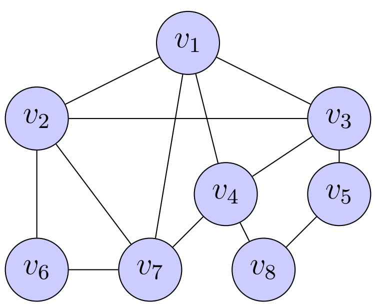
6. Streiche die Kanten des Zykels K aus dem Graphen G.
7. Führe 2. aus. So entsteht ein weiterer Unterzykel $\tilde{K}$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, indem in K der Knoten v durch die gesamte Knotenfolge aus $\tilde{K}$ ersetzt wird. Der zusammengesetzte Zykel heißt K.
9. Gehe zu 4. .

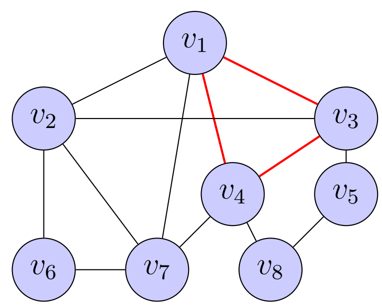
Durch Löschen der Kanten bleibt der verbleibende Graph ein Graph mit Knoten geraden Grades. Der Graph muss aber nicht mehr zusammenhängend sein. Wenn Knoten mit Grad 0 entstehen, können diese unberücksichtigt bleiben.

Visualisierung des Hierholzer-Algorithmus an einem Beispiel eines einfachen Graphen:

Erzeugen eines ersten Unterzykels $\tilde{K}$:

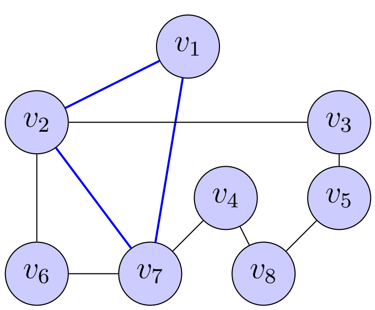
Gegebener Beispiel-Graph:





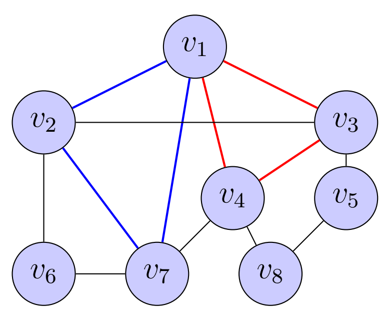
Konstruiere z.B. Unterzykel $\tilde{K} = (v_1, v_3, v_4, v_1) = K$

Der zweite Unterzykel $\tilde{K}$ wird z.B. bei Knoten v_1 angeschlossen. Es ist möglich dort zu starten, da der Grad von v_1 „außerhalb von K“ gleich $2 \neq 0$ ist. Auch die Knoten v_3 und v_4 wären Kandidaten für einen solchen Startknoten. Nach dem Streichen der Kanten von K erhält man:



Wähle z.B. $\tilde{K} = (v_1, v_2, v_7, v_1)$

Zusammengefasst:

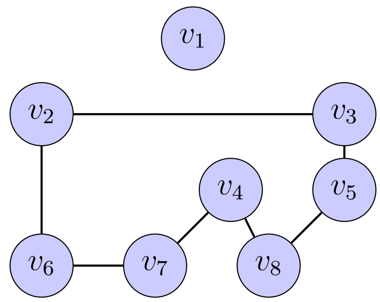


$K = (v_1, v_3, v_4, v_1)$

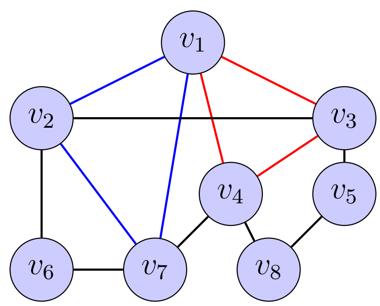
$\tilde{K}$ in K einfügen. Dies liefert ein neues K: $K = (v_1, v_2, v_7, v_1, v_3, v_4, v_1)$

Dritter Unterzykel:

Wenn die Kanten von $K = (v_1, v_2, v_7, v_1, v_3, v_4, v_1)$ gelöscht werden, entsteht der folgende Graph.

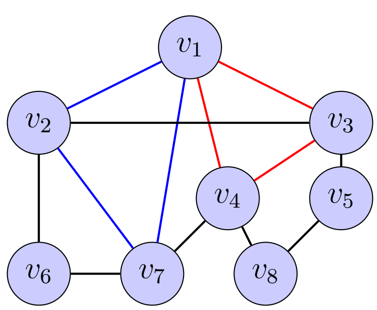


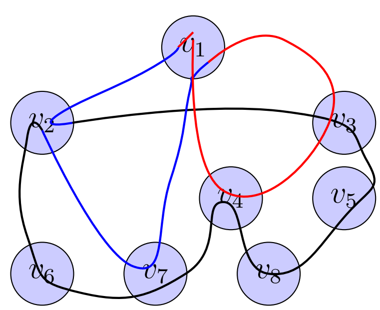
Der Knoten v_1 kann im Prinzip ebenfalls gestrichen werden, da er Grad 0 besitzt. Als Startknoten kommen nun die Knoten v_2, v_3, v_4, v_7 in Frage. Gewählt wird v_2. Es ist klar, dass nun nur noch der Unterzykel $\tilde{K} = (v_2, v_3, v_5, v_8, v_4, v_7, v_6, v_2)$ möglich ist. Zusammengefasst erhält man:



$\tilde{K}$ in K einfügen bei v_2. Dies liefert $K = (v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_4, v_7, v_6, v_2, v_7, v_1, v_3, v_4, v_1)$

Da nun alle Kanten durchlaufen wurden, bricht der Algorithmus ab und der Euler-Kreis $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_4, v_7, v_6, v_2, v_7, v_1, v_3, v_4, v_1)$ ist gefunden.



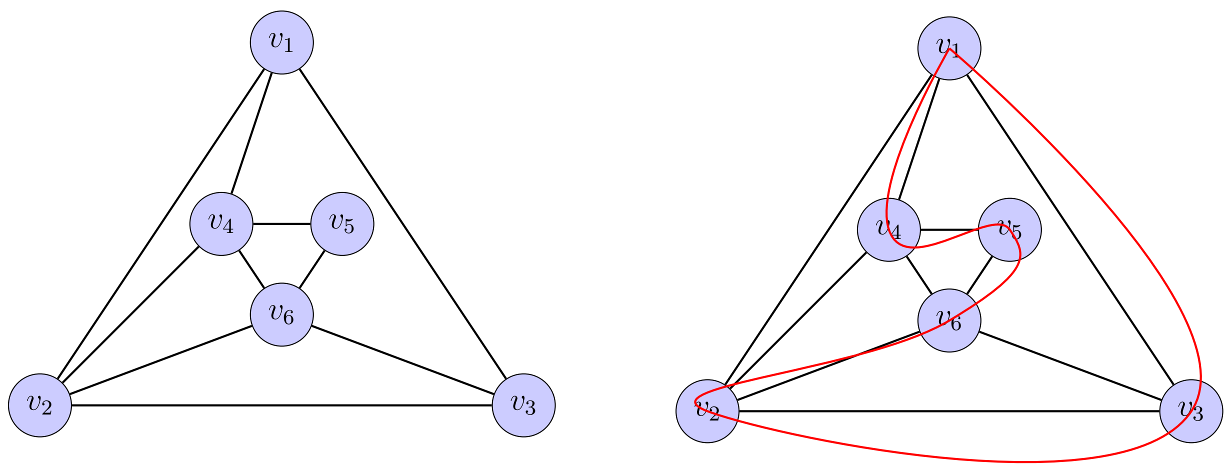


Hamilton-Kreise:

Nun kann man sich fragen, welche Aussagen es gibt, wenn man Kanten durch Knoten ersetzt, d.h. gesucht ist ein Kreis im Graphen, der alle Knoten genau einmal enthält. Der Kreis muss nicht alle Kanten des Graphen durchlaufen. Man definiert:

Definition:
Ein *Hamilton-Kreis* (nach W. Hamilton, irischer Mathematiker und Physiker, 1805-1865) oder auch eine *Rundreise* ist ein Kreis in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält (Anfangs- und Endknoten werden als *ein* Knoten behandelt). Ein Graph, der einen Hamilton-Kreis enthält, heißt *Hamilton-Graph*.

Beispiel eines Hamilton-Graphs: Der Kreis $(v_1, v_4, v_5, v_6, v_2, v_3, v_1)$ ist ein Hamilton-Kreis.



Im Gegensatz zum Euler-Kreis-Problem ist das Hamilton-Kreis-Problem ein viel schwierigeres. Die hinreichenden Kriterien, wann ein Hamilton-Kreis für einen gegebenen Graphen existiert, sind nicht so einfach zu formulieren wie beim Euler-Kreis-Problem. Auch eine Lösung mit Hilfe von Algorithmen ist nicht so einfach zu finden wie beim Euler-Kreis-Problem. Informatiker/innen sagen: „Das Hamilton-Kreis-Problem ist NP-vollständig.“

Das Hamilton-Kreis-Problem spielt eine Rolle bei bewerteten Graphen für das sogenannte Traveling-Salesman-Problem. Bei bewerteten Graphen werden den Kanten nichtnegative Zahlen zugeordnet. Die Zahlen werden z.B. als Länge der Kante oder als Kosten längs der Kante interpretiert. Beim Traveling-Salesman-Problem werden kürzeste oder billigste Rundreisen in gegebenen Graphen gesucht. Dies ist natürlich nur sinnvoll, wenn der gegebene Graph auch Hamilton-Kreise enthält.

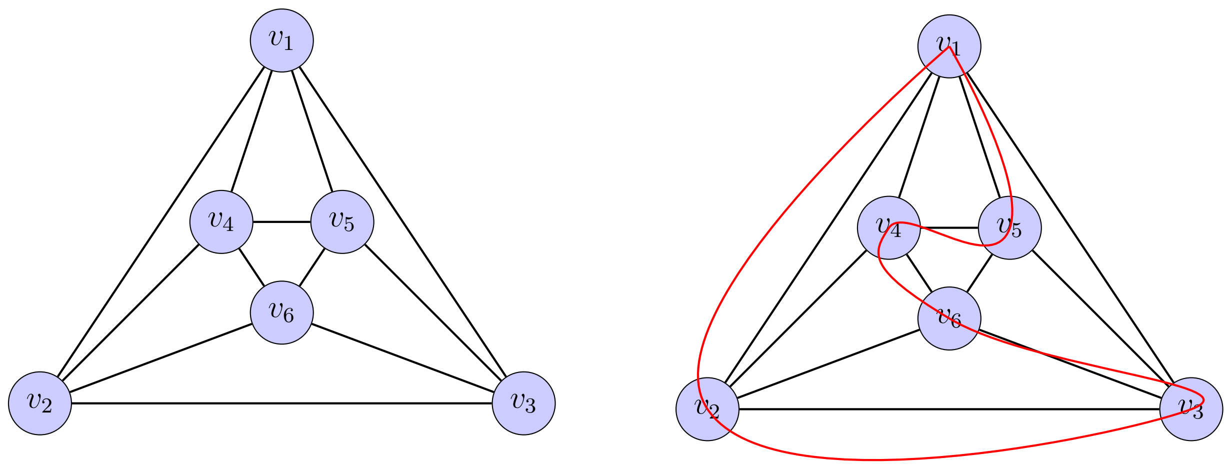
Bemerkung:

Ein noch einfach zu formulierendes hinreichendes Kriterium für einen Hamilton-Graphen nach G. A. Dirac (ungarisch-britischer Mathematiker, 1925-1984) ist:

Ist in einem Graph mit mindestens drei Knoten der Grad jedes Knotens größer gleich der halben Ordnung des Graphen, dann enthält der Graph einen Hamilton-Kreis.

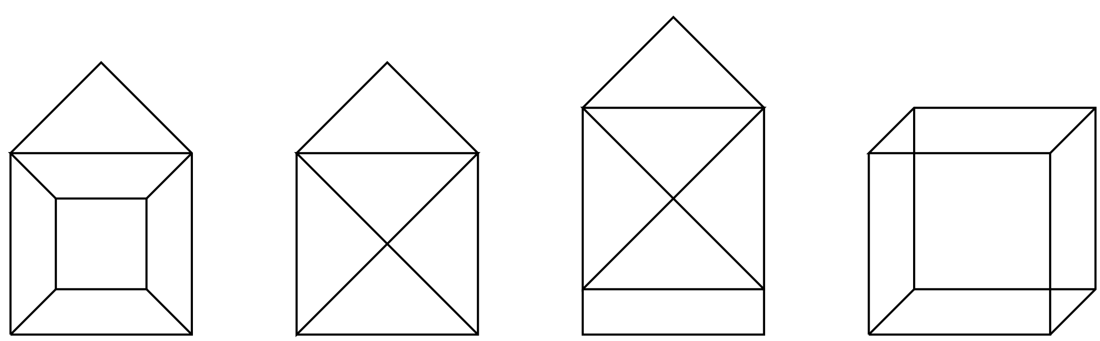
Das Kriterium ist nicht notwendig, wie man am obigen Beispiel sieht. Die Ordnung des Graphen ist 6, aber es gibt einen Knotengrad $2 < 3$.

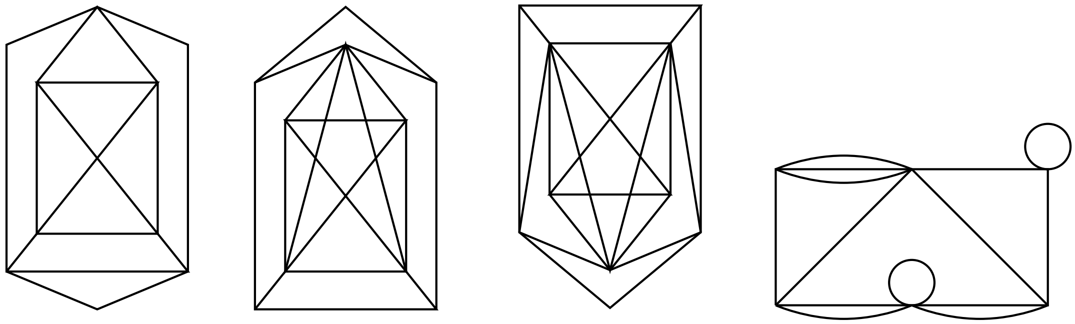
Beispiel für das Kriterium von Dirac:
Der folgende Graph hat 6 Knoten und ist 4-regulär. Da $4 > \frac{6}{2}$ ist, ist der Graph ein Hamilton-Graph. Als Hamilton-Kreis kann $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, v_5, v_1)$ gewählt werden.



4. Behandlung des Themas im Unterricht:

1. **Kleingruppenarbeit „Figuren nachzeichnen“:**
   Schüler/innen sollen „Figuren“ mit einem Strich nachzeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne einen Strich der Figur doppelt zu überfahren. Bei welchen der folgenden Figuren geht dies? Ist es egal, an welcher Stelle der Figur man beginnt?





Diskussion:
Woran könnte es liegen, dass manche Figuren nicht nachzeichenbar sind, ohne den Stift abzusetzen?

Diskussion der Ergebnisse der einzelnen Gruppen im Plenum

2. **Erläuterung der Begriffe der Graphentheorie und Definition eines Euler-Wegs und eines Euler-Graphen gemäß Abschnitt 1. bis 3. .**

3. **Kleingruppenarbeit**
   Aufgabe:
   Begriffe Schlinge, Mehrfachkante, Ordnung, Größe, Grade an Beispielen von Graphen üben.

   Die Schüler/innen können dabei selber Graphen zeichnen, die bestimmte Vorgaben erfüllen sollen, z.B.:
   Der Graph muss fünf Schlingen und zwei Doppelkanten und eine Dreifachkante enthalten.
   Der Graph soll von der Ordnung 6 sein und die Größe 20 haben.
   Der Graph soll genau sieben Knoten enthalten, deren Grade jeweils $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ sind.
   Gibt es einen Graphen, der genau sieben Knoten enthält mit den Knotengraden $0, 1, 1, 1, 2, 3, 3$?
   (Hinweis an die Lehrer/innen, um eine Antwort zu finden: Das Stichwort für die Suche im Internet ist das sogenannte Handschlaglemma.)

   Die Gruppen stellen ihre Ergebnisse den anderen Gruppen vor, Diskussion im Plenum über die letzte Fragestellung.

   Aufgabe:
   Welche der obigen Figuren sind Euler-Graphen?
   Bei welchen existiert wenigstens ein (nicht geschlossener) Euler-Weg?
   Wie kann man die Graphen, bei denen es nur einen Euler-Weg gibt, einfach erweitern zu einem Euler-Graph?

   Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gruppen, Diskussion im Plenum über die letzte Fragestellung

   Aufgabe:
   Welche der obigen Figuren sind Hamilton-Graphen?
   Dabei soll ein Punkt in einer Figur ein Knoten des zugehörigen Graphen sein, wenn mehrere

Linien der Figur (Kanten des Graphs) an diesem Punkt zusammenkommen, oder sich mehrere Linien in diesem Punkt schneiden, oder der Punkt eine Ecke ist (d.h. zwei Linien mit verschiedener Richtung kommen zusammen).

Die Gruppen stellen ihre gefundenen Rundreisen den anderen Gruppen vor.

5. Quellen, Links und Literatur

[1] Franz-Josef Schneider, Skript zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“, intern, Hochschule für Technik Stuttgart

[2] Jörg Homberger, Gabi Preissler, Harald Bauer, Operations Research und Künstliche Intelligenz, UTB-Verlag, 2019

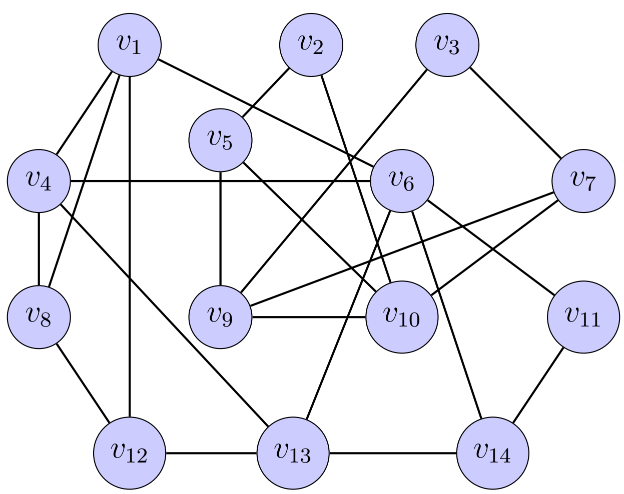
[3] Peter Tittmann, Graphentheorie – Eine anwendungsorientierte Einführung, Hanser-Verlag, 3. Auflage, 2019

[4] Lehrer/innenfortbildung Baden-Württemberg, Bildungsplan, IMP, Klasse 8,
Lehrer/innenfortbildung Baden-Württemberg, Grundbegriffe Graphentheorie, Zugriff am 04.03.2021
Lehrer/innenfortbildung Baden-Württemberg, Euler-Graphen, Zugriff am 04.03.2021

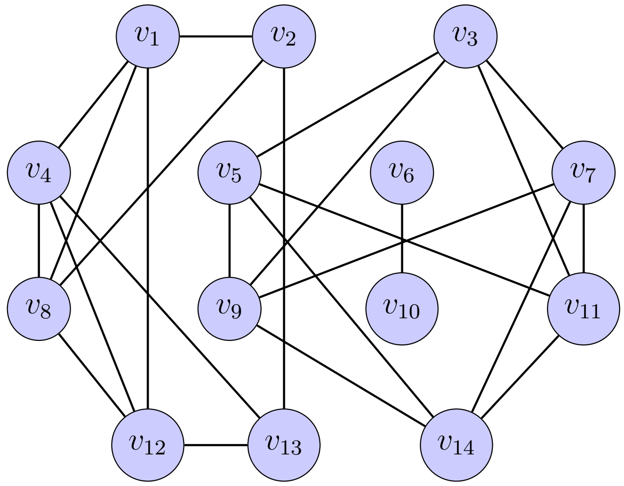
6. Aufgaben

1. **Begriffe der Graphentheorie**, nach [2]
   Bestimme die Ordnung, die Größe und den Knotengrad aller Knoten der folgenden Graphen. Entscheide, ob der Graph zusammenhängend ist oder nicht, ob der Graph oder ein zusammenhängender Teilgraph ein Euler-Graph ist oder nicht.

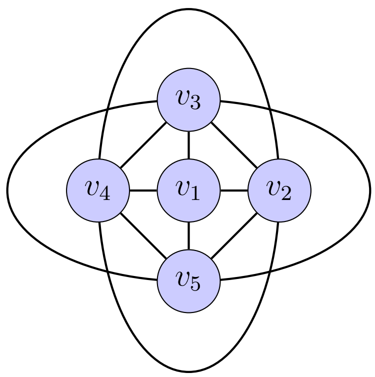
   a)



   b)



2. Gegeben ist der G mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ und 12 Kanten:



   Beantworte die nachfolgenden Fragen jeweils mit Begründung.

   a) Ist G ein einfacher Graph? Ist G ein 5-regulärer Graph?

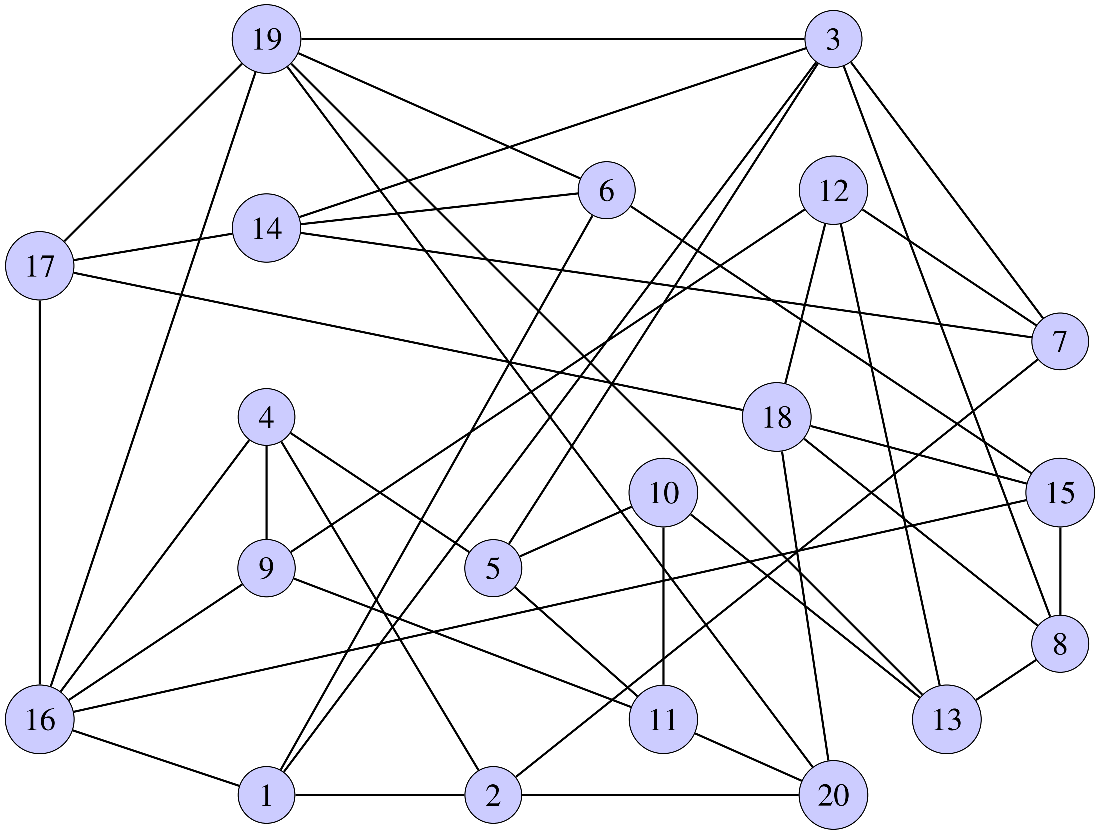
   b) Enthält G einen (nicht geschlossenen) Euler-Weg?

   c) Ist G ein Hamilton-Graph?

3. Zeichne den Graphen G, der gegeben ist durch die Mengen $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ mit $e_1 = \langle 1, 3\rangle, e_2 = \langle 4, 1\rangle, e_3 = \langle 2, 4\rangle, e_4 = \langle 2, 3\rangle, e_5 = \langle 2, 2\rangle$.

   Ist G einfach? Ist G zusammenhängend? Ist G 2-regulär?
   Ist G ein Euler-Graph oder ein Hamilton-Graph?

4. Finde bei dem Graphen

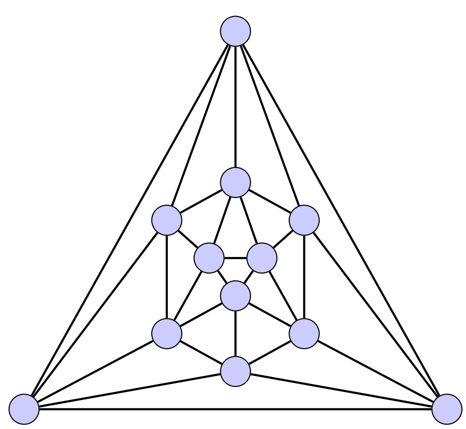


mittels des Algorithmus von Hierholzer einen Euler-Kreis.

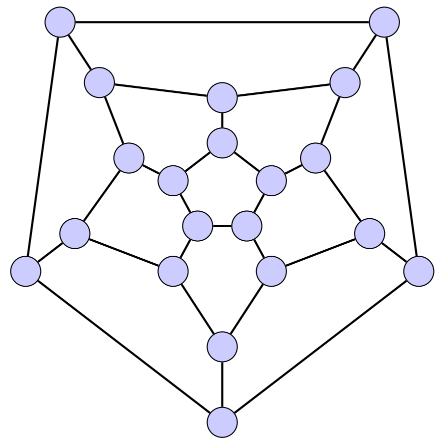
5. Gib einen Graphen der Ordnung 5 an, der ein Euler-Graph ist, aber bei dem kein Hamilton-Kreis möglich ist. Gib einen Graphen der Ordnung 5 an, bei dem ein Hamilton-Kreis möglich ist, aber kein Euler-Kreis.

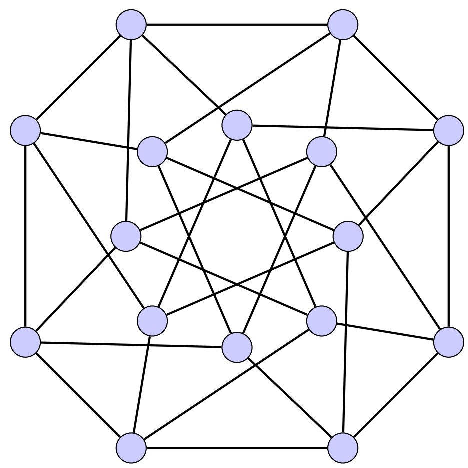
6. Finde in den folgenden Graphen einen Hamilton-Kreis.

Ikosaeder-Graph



Dodekaeder-Graph

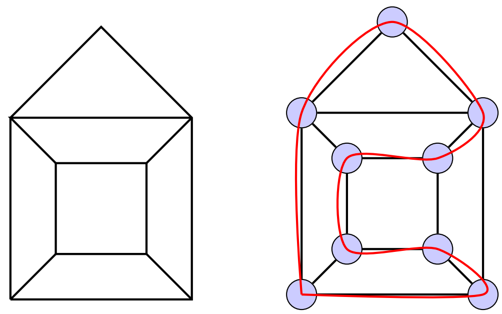




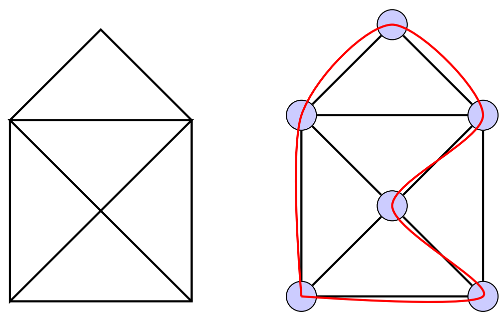
7. Lösungen der Aufgaben:

Zum Abschnitt 4:

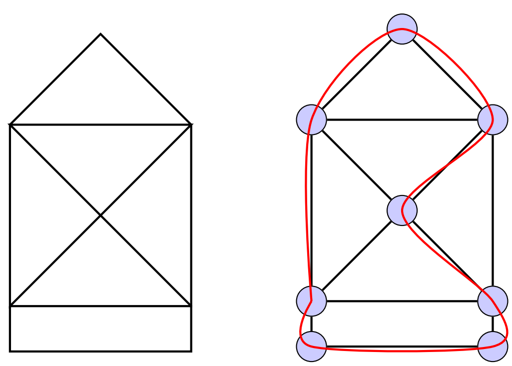
1.



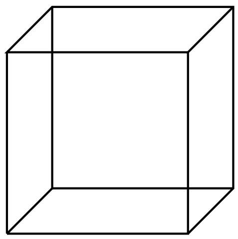
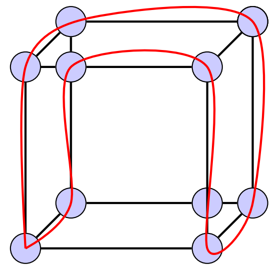
Diese Figur kann nicht in einem Zug, ohne den Stift abzusetzen, gezeichnet werden. Es liegt aber ein Hamilton-Graph vor, s. zweites Bild mit eingezeichnetem Hamilton-Kreis.



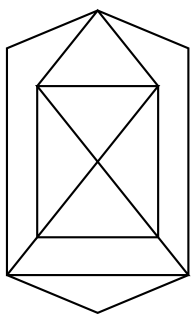
Dies ist das „Haus vom Nikolaus“, das sich in einem Zug zeichnen lässt. Beginnen muss man an einer von den beiden unteren Ecken. Es liegt ein Graph mit einem Euler-Weg und ein Hamilton-Graph vor. Dazu ist ein Hamilton-Kreis auf der rechten Seite in rot angegeben.



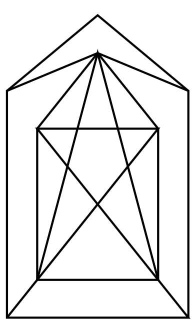
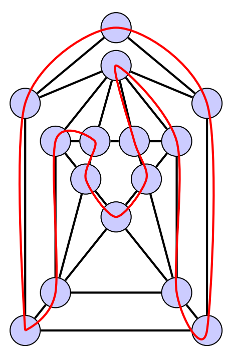
Dies ist das „Haus vom Nikolaus“ mit Keller, das sich in einem Zug zeichnen lässt. Beginnen kann man an jeder Stelle der Figur. Es liegt ein Euler-Graph und ein Hamilton-Graph (Hamilton-Kreis oben in rot) vor.

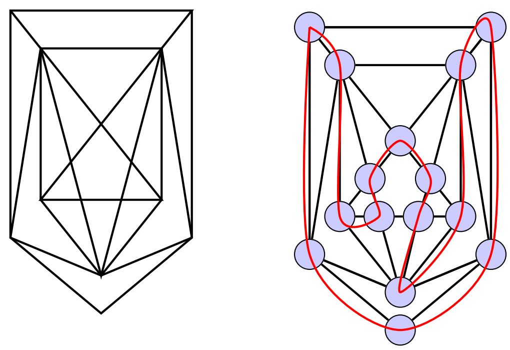
Diese Figur (ein axonometrisches Bild eines Würfels) kann nicht ohne abzusetzen mit einem Strich gezeichnet werden. Es liegt ein Hamilton-Graph vor.



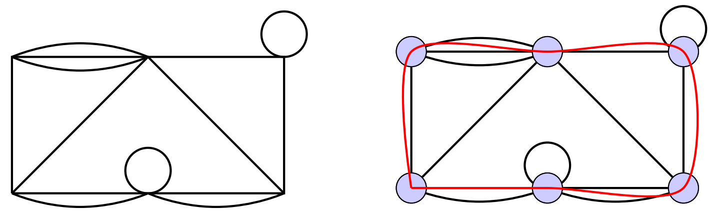
Diese Figur lässt sich in einem Zug zeichnen. Beginnen kann man an jeder Stelle der Figur. Es liegt ein Euler-Graph, aber kein Hamilton-Graph vor.

Diese Figur lässt sich nicht mit einem Strich durchzeichnen. Es liegt ein Hamilton-Graph vor.

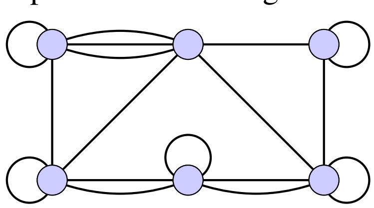


Diese Figur lässt sich mit einem Strich zeichnen, beginnen muss man an einer der beiden oberen Ecken. Es liegt ein Graph vor, bei dem ein Euler-Weg existiert. Der Graph ist auch ein Hamilton-Graph, da gegenüber dem vorigen Beispiel lediglich zwei Kanten dazukamen.

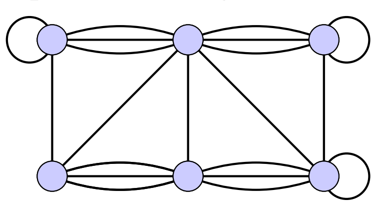


Diese Figur ist ebenfalls mit einem Strich ohne abzusetzen zu zeichnen. Man kann dabei überall beginnen zu zeichnen. Es liegt ein Euler-Graph und ein Hamilton-Graph vor.

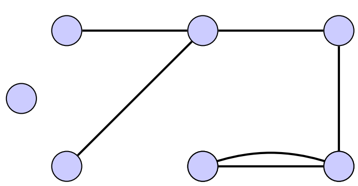
3. Ein Graph mit fünf Schlingen und zwei Doppelkanten und einer Dreifachkante kann z.B. sein



Ein Graph mit Ordnung 6 und Größe 20 ist z.B.:



Ein Graph mit 7 Knoten und Knotengraden $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ ist:



Graphen mit Euler-Wegen kann man zu Euler-Graphen machen, indem man den Anfangs- und Endknoten des Euler-Wegs (mit ungeradem Grad) miteinander durch eine Kante verbindet. Dann haben die beiden Knoten ebenfalls geraden Grad und es liegt ein Euler-Graph vor.

Lösungen zu Abschnitt 6:

1. a) Die Größe des Graphen ist $|E| = 23$, die Ordnung des Graphen ist $|V| = 14$. Die Knotengrade lauten:
$g(v_1) = 4, \quad g(v_2) = 2, \quad g(v_3) = 2, \quad g(v_4) = 4, \quad g(v_5) = 3,$
$g(v_6) = 5, \quad g(v_7) = 3, \quad g(v_8) = 3, \quad g(v_9) = 4, \quad g(v_{10}) = 4,$
$g(v_{11}) = 2, \quad g(v_{12}) = 3, \quad g(v_{13}) = 4, \quad g(v_{14}) = 3.$
Der Graph ist nicht zusammenhängend. Es gibt zwei zusammenhängende, bzgl. der Knotenanzahl maximale Teilgraphen. Solche Teilgraphen nennt man auch *Zusammenhangskomponenten*.
Die erste Zusammenhangskomponente enthält die Knoten $v_1, v_4, v_6, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$, der zweite Teilgraph besitzt die Knoten $v_2, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{10}$.
Die erste Zusammenhangskomponente ist kein Euler-Graph, da es mindestens einen Knoten gibt, der ungeraden Grad besitzt, z.B. v_6. Die zweite Zusammenhangskomponente ist auch kein Euler-Graph, da es mindestens einen Knoten gibt, der ungeraden Grad besitzt, z.B. v_5.

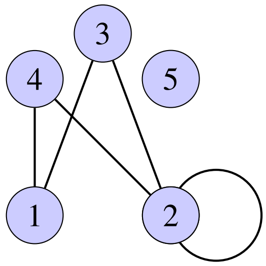
   b) Die Größe des Graphen ist $|E| = 24$, die Ordnung des Graphen ist $|V| = 14$. Die Knotengrade lauten:
$g(v_1) = 4, \quad g(v_2) = 3, \quad g(v_3) = 4, \quad g(v_4) = 4, \quad g(v_5) = 4,$
$g(v_6) = 1, \quad g(v_7) = 4, \quad g(v_8) = 4, \quad g(v_9) = 4, \quad g(v_{10}) = 1,$
$g(v_{11}) = 4, \quad g(v_{12}) = 4, \quad g(v_{13}) = 3, \quad g(v_{14}) = 4.$
Der Graph ist nicht zusammenhängend. Es gibt drei Zusammenhangskomponenten. Die erste Zusammenhangskomponente enthält die Knoten $v_1, v_2, v_4, v_8, v_{12}, v_{13}$, die zweite besitzt die Knoten $v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{14}$. Die dritte Zusammenhangskomponente enthält die Knoten v_6 und v_{10}.
Die erste Zusammenhangskomponente ist kein Euler-Graph, da es mindestens einen Knoten gibt, der ungeraden Grad besitzt, z.B. v_2. Die zweite Zusammenhangskomponente ist ein Euler-Graph, da alle Knotengrade gerade sind. Die dritte Komponente ist kein Euler-Graph, da beide Knoten ungeraden Grad, nämlich 1, besitzen.

2. a) G ist kein einfacher Graph, da Mehrfachkanten existieren. Es gibt zwei Doppelkanten $\langle v_2, v_4\rangle$ und $\langle v_3, v_5\rangle$. G ist nicht 5-regulär, da der Knoten v_1 nur Grad 4 besitzt.

   b) Ein nicht geschlossener Euler-Weg ist in G nicht möglich, da es mehr als zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt, nämlich v_2, v_3, v_4, v_5.

   c) G ist ein Hamilton-Graph, da eine Rundreise z.B. $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ ist.

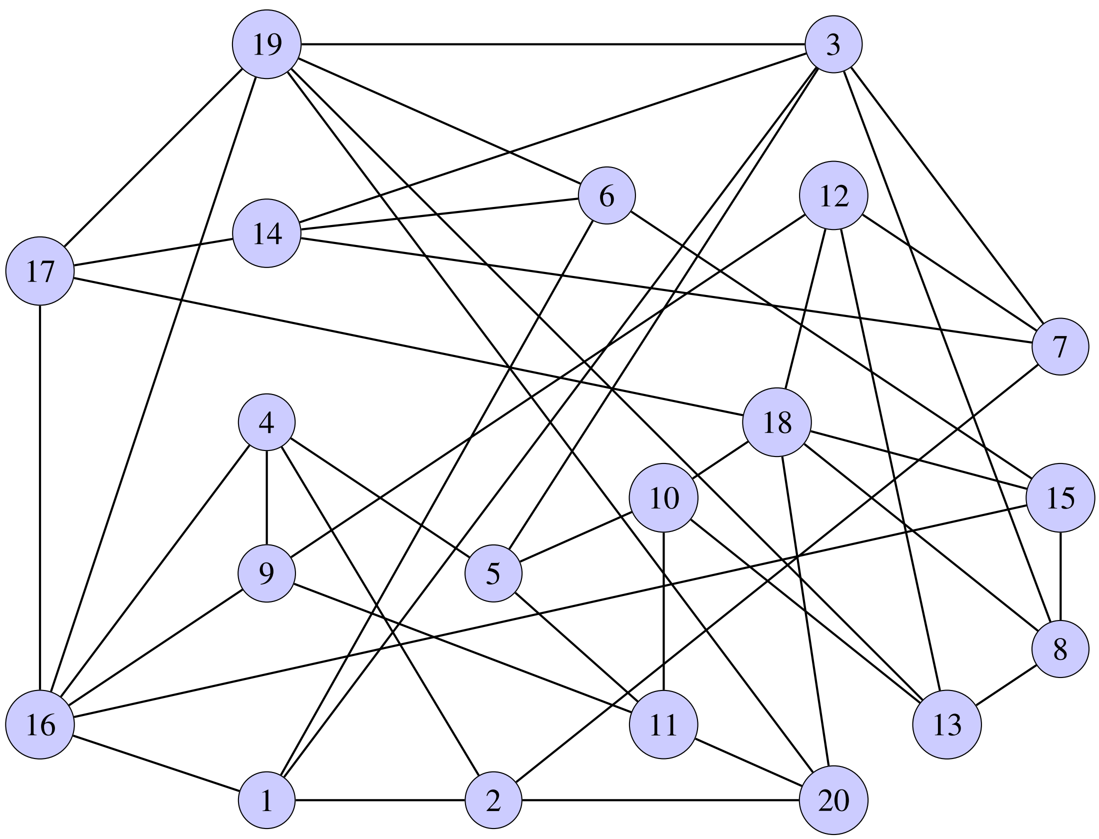
3. Der Graph G kann z.B. wie folgt gezeichnet werden:



G ist nicht einfach, da G eine Schlinge enthält. G ist nicht zusammenhängend, da man den Knoten mit der Nummer 5 nicht von anderen Knoten über einen Weg erreichen kann. G ist nicht 2-regulär, da z.B. der Knoten mit der Nummer 2 Grad 4 besitzt. G ist kein Euler-Graph und kein Hamilton-Graph, da G nicht zusammenhängend ist.

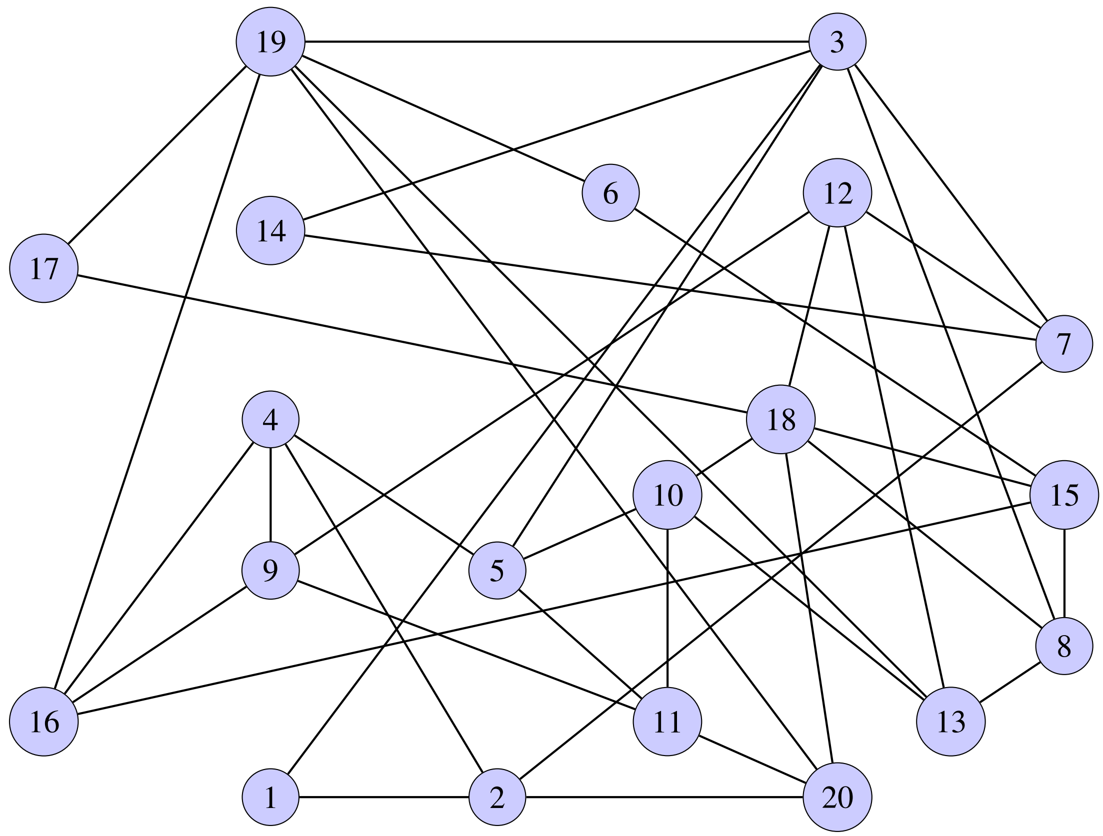
Alle in anderer Weise gezeichneten Graphen sind sogenannte *isomorphe* Graphen zum oben gezeichneten Graphen.

4. Hierholzer-Algorithmus am Graph

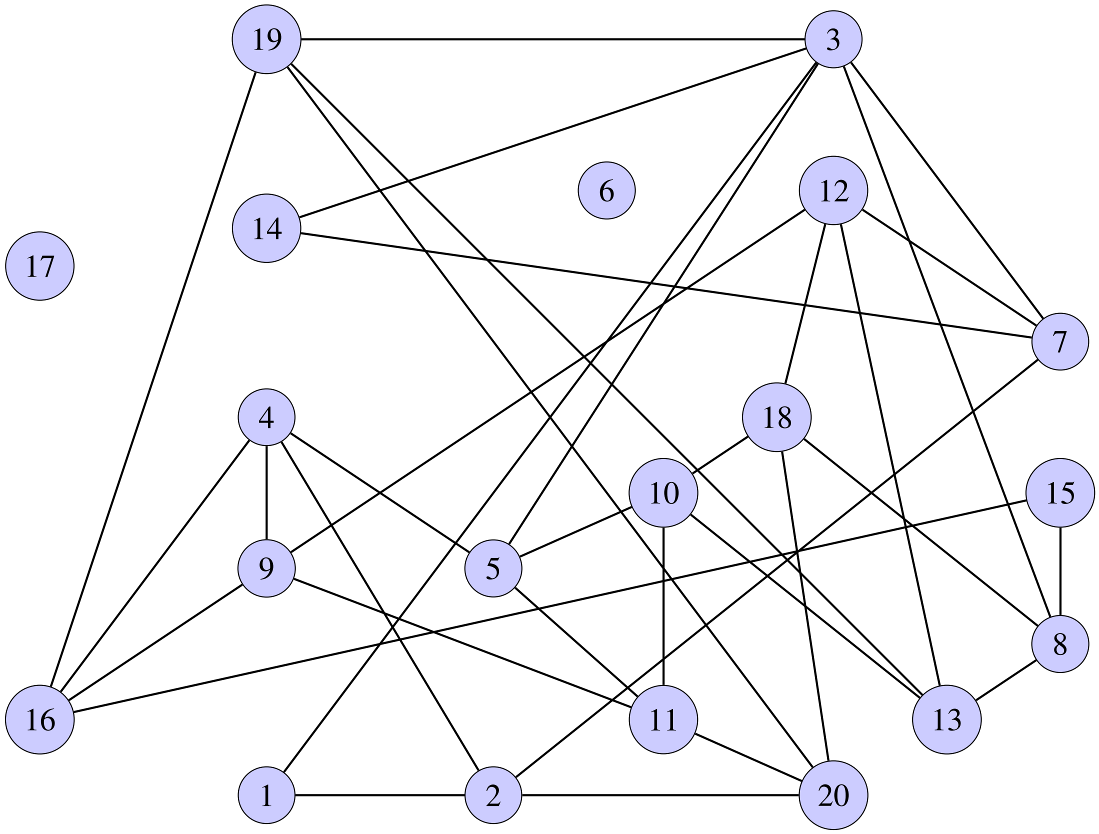


1. Wähle Knoten $v = 1$.
2. Z.B. wird der Unterzykel $\tilde{K} = (1, 6, 14, 17, 16, 1)$ erzeugt.
3. Umbenennung zu $K = (1, 6, 14, 17, 16,)$.
4. K enthält nicht alle Kanten des Graphen, deshalb weiter mit 5..

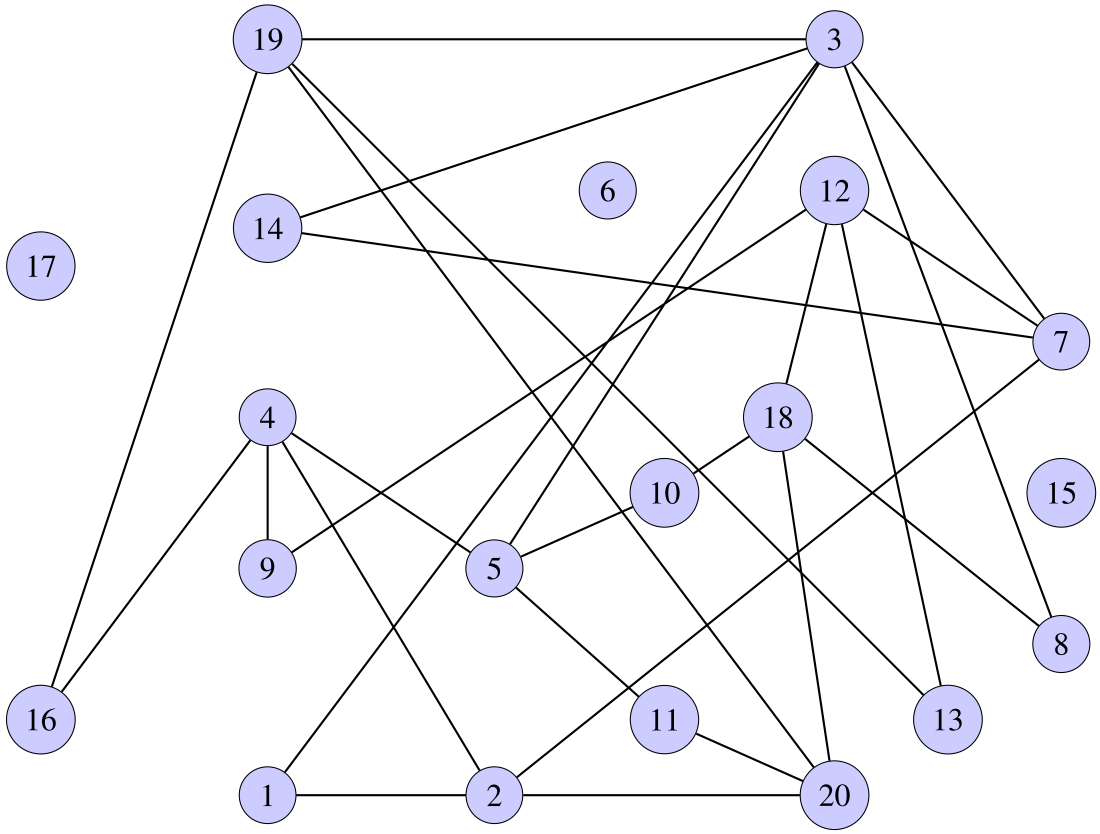
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 6, 14, 17, 16$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 6$. Streiche Kanten des Unterzykles K, der Graph sieht dann wie folgt aus:



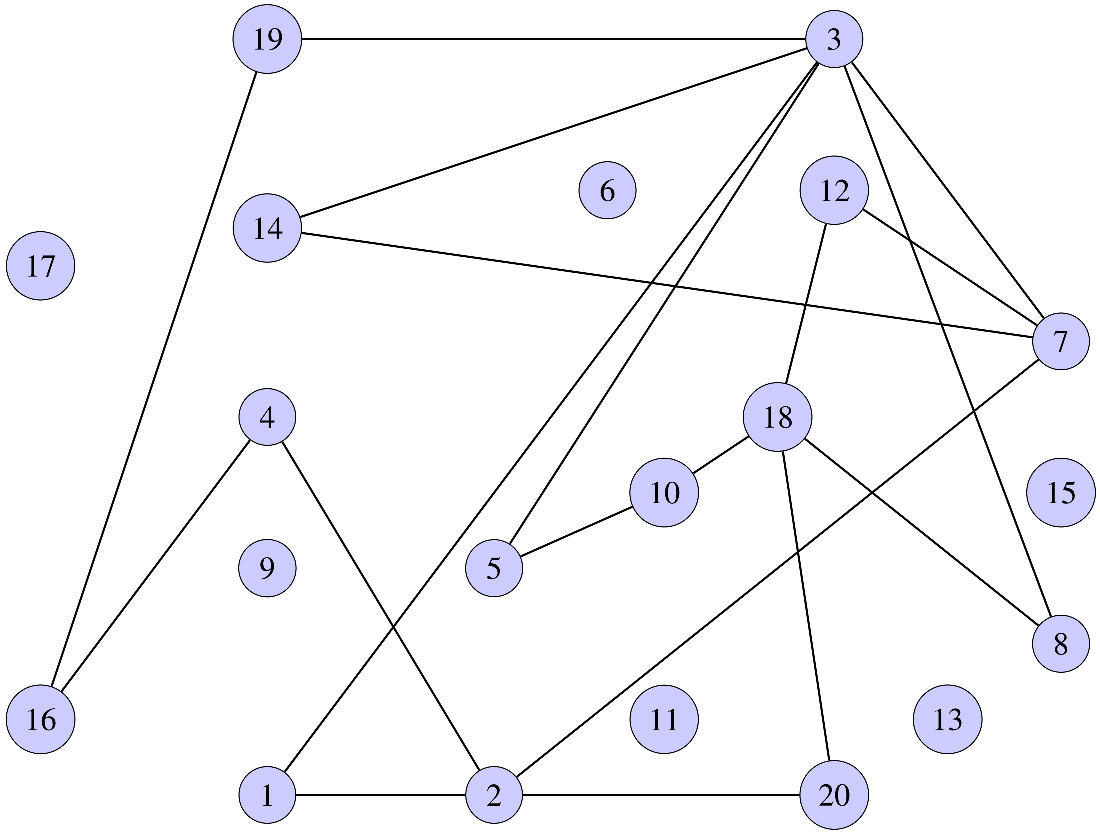
2. Konstruiere ausgehend von 6 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (6, 19, 17, 18, 15, 6)$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel $K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 6, 14, 17, 16, 1)$.
4. K enthält noch nicht alle Kanten von G, damit weiter mit 5..
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 19, 17, 18, 15, 14, 16$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 15$. Streiche Kanten des Unterzykel K, der Graph sieht dann wie folgt aus:



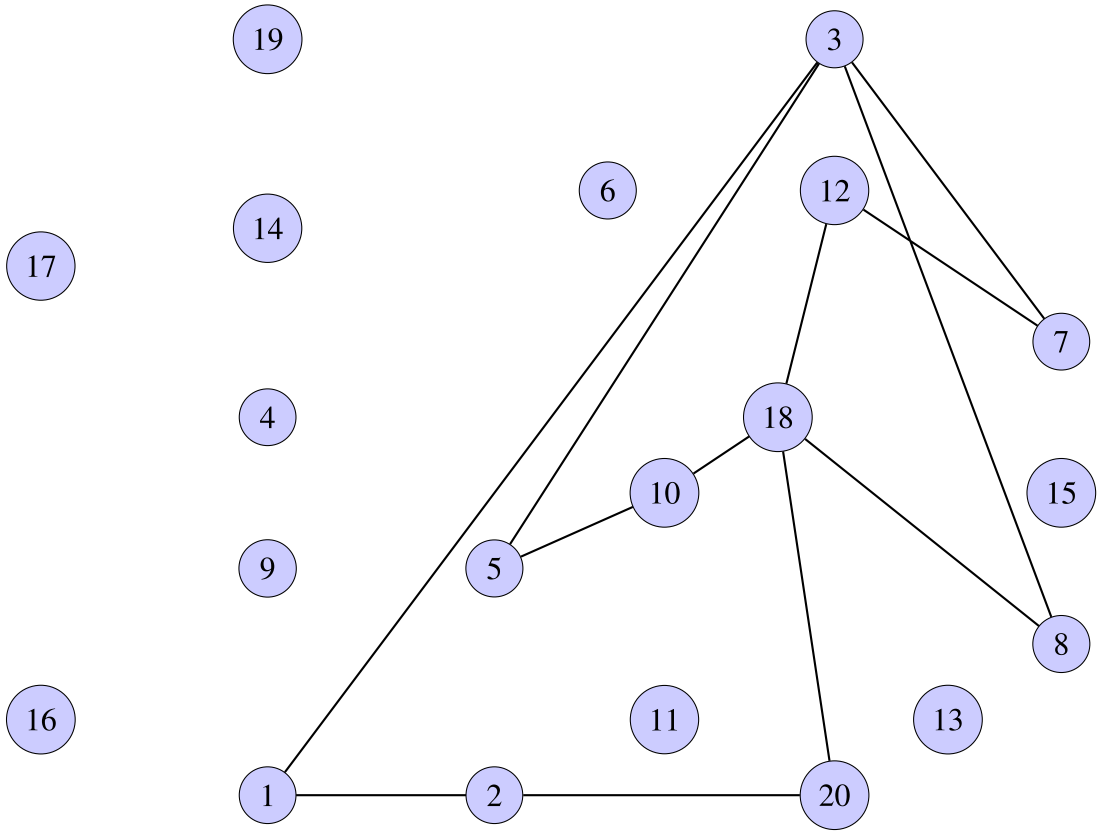
2. Konstruiere ausgehend von 15 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (15, 8, 13, 10, 11, 9, 16, 15)$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel
$K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 9, 16, 15, 6, 14, 17, 16, 1)$.
4. K enthält noch nicht alle Kanten von G, damit weiter mit 5..
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 19, 18, 8, 13, 10, 11, 9, 16, 14$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 11$. Streiche Kanten des Unterzykel K, der Graph sieht dann wie folgt aus:



2. Konstruiere ausgehend von 11 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (11, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 20, 11)$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel
   $K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 20, 11, 9, 16, 15, 6, 14, 17, 16, 1)$.
4. K enthält noch nicht alle Kanten von G, damit weiter mit 5..
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 19, 18, 8, 10, 5, 4, 12, 19, 20, 16, 14$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 19$. Streiche Kanten des Unterzykel K, der Graph sieht dann wie folgt aus:



2. Konstruiere ausgehend von 19 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (19, 3, 14, 7, 2, 4, 16, 19)$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel
   $K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 3, 14, 7, 2, 4, 16, 19, 20, 11, 9, 16, 15, 6, 14, 17, 16$
4. K enthält noch nicht alle Kanten von G, damit weiter mit 5..
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 18, 8, 10, 5, 12, 3, 7, 2, 20$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 5$. Streiche Kanten des Unterzykel K, der Graph sieht dann wie folgt aus:

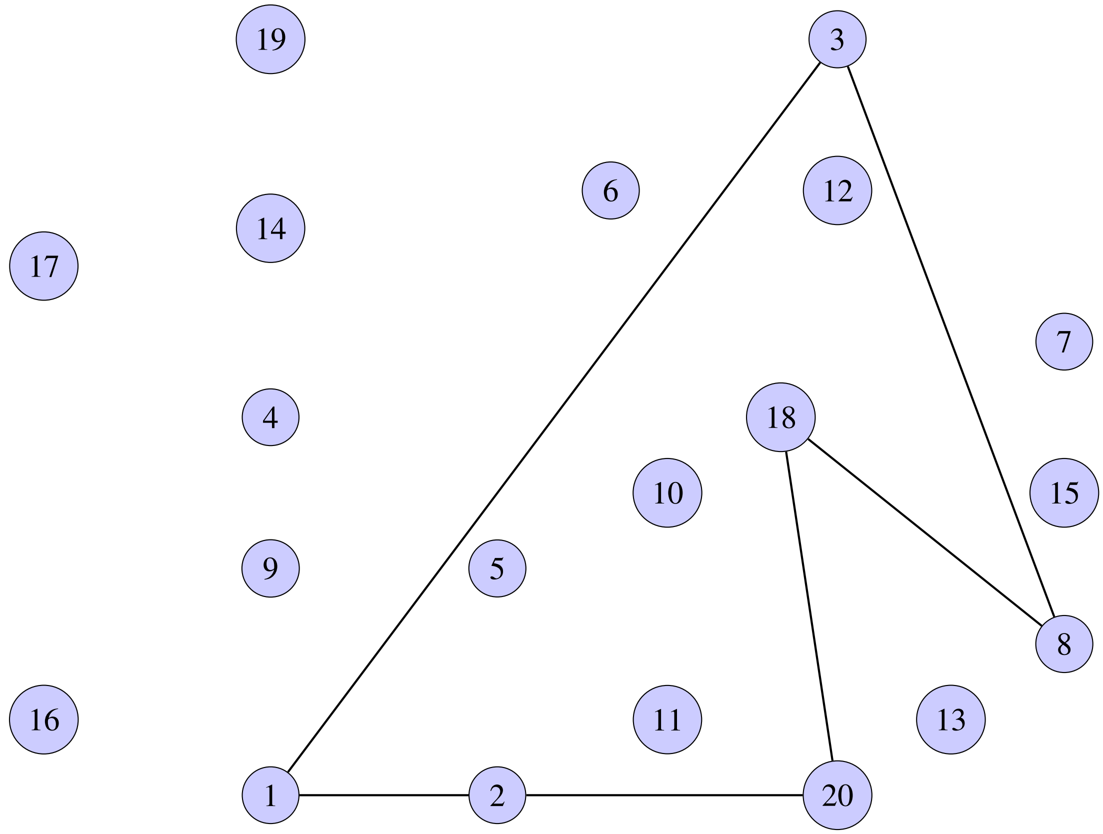


2. Konstruiere ausgehend von 5 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (5, 3, 7, 12, 18, 10, 5)$.

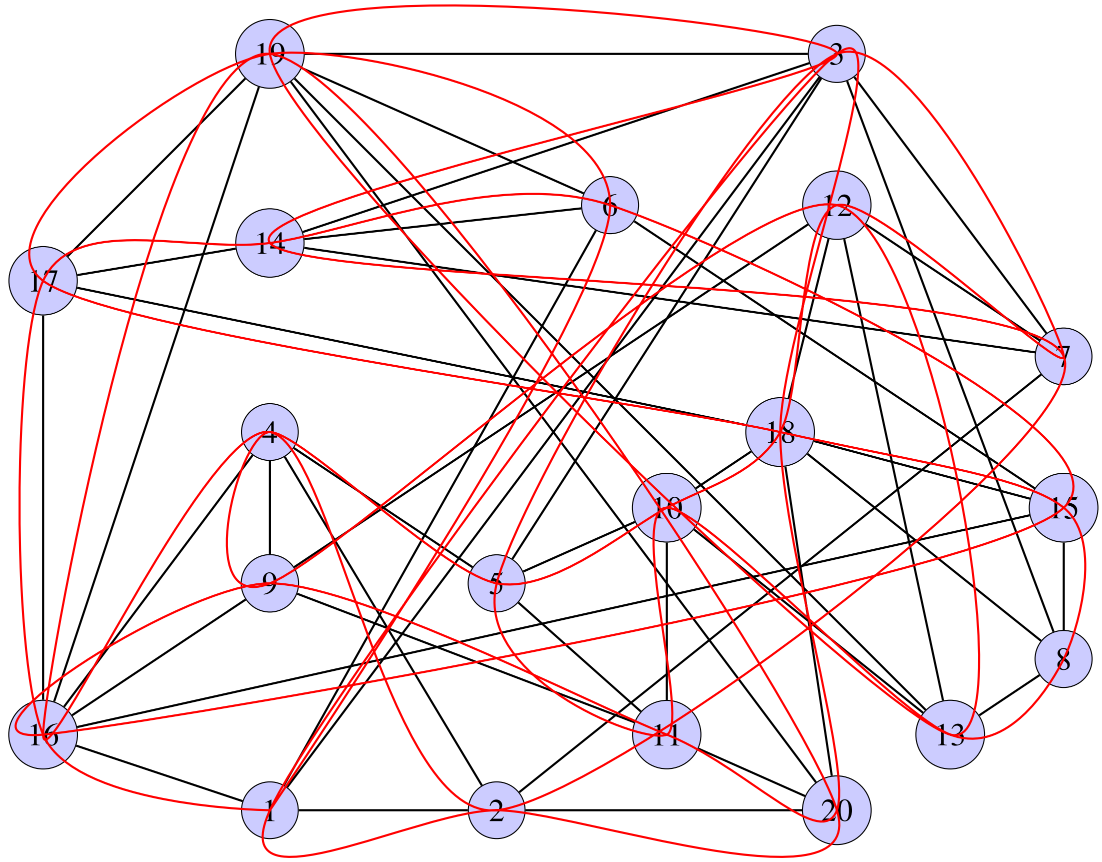
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel
$K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 5, 3, 7, 12, 18, 10, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 3, 14, 7, 2, 4, 16, 19, 20, 11, 9, 1$

4. K enthält noch nicht alle Kanten von G, damit weiter mit 5..

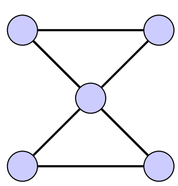
5. Als mögliche Knoten v mit Grad größer 0 außerhalb von K kommen $1, 18, 8, 3, 2, 20$ in Frage. Wähle z.B. Knoten $v = 20$. Streiche Kanten des Unterzykel K, der Graph sieht dann wie folgt aus:



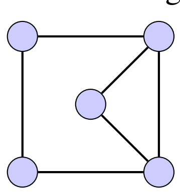
2. Konstruiere ausgehend von 20 z.B. den Unterzykel $\tilde{K} = (20, 2, 1, 3, 18, 20)$.
8. Füge $\tilde{K}$ in K ein, es entsteht der Unterzykel
   $K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 5, 3, 7, 12, 18, 10, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 3, 14, 7, 2, 4, 16, 19, 20, 2, 1, 3, 18, 20, 11, 9, 16, 15, 6, 14, 17, 16, 1)$.
4. K enthält nun alle Kanten von G, damit ist der Euler-Kreis gefunden. Er lautet $K = (1, 6, 19, 17, 18, 15, 8, 13, 10, 11, 5, 3, 7, 12, 18, 10, 5, 4, 9, 12, 13, 19, 3, 14, 7, 2, 4, 16, 19, 20, 2, 1, 3, 18, 20, 11, 9, 16, 15, 6, 14, 17, 16, 1)$ und er ist im nachfolgenden originalen Graphen eingezeichnet.



5. Ein Graph der Ordnung 5, der ein Euler-Graph, aber kein Hamilton-Graph ist:

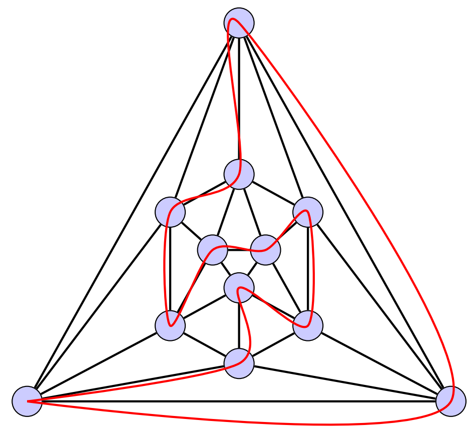


Graph der Ordnung 5, der ein Hamilton-Graph ist, aber kein Euler-Graph ist:

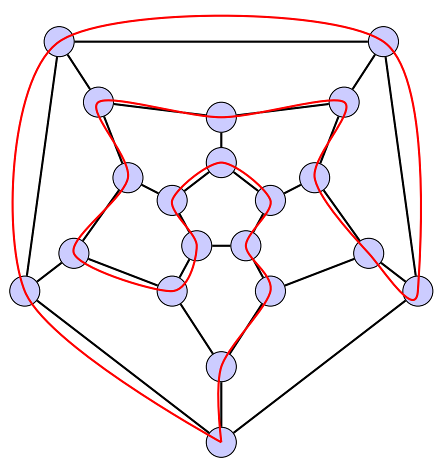


6. Hamilton-Kreise sind z.B.:

Beim Ikosaeder-Graph:



Beim Dodekaeder-Graph:



Beim dritten Graphen: